Primjer 2. Funkcija $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ima drugi izvod na skupu $R \setminus \{0\}$. Pri tome je $f''(x) = \frac{2}{x^3}$, pa kako je $f''(x) > 0$ za $x > 0$, slijedi da je funkcija (strogo) konveksna na skupu $(0, +\infty)$. Kako je $f''(x) < 0$ za $x < 0$, funkcija je (strogo) konkavna na skupu $(-\infty, 0)$.

Tačka $x_0 \in (a, b)$ je *prevojna tačka* (grafika) funkcije f koja je definisana na (a, b), ako postoji probodena okolina $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) = I_1 \cup I_2$ tačke x_0, takva da je funkcija u jednom od ta dva intervala strogo konveksna a u drugom strogo konkavna.

Primjer 3. Drugi izvod funkcije $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x - 5$ je $f''(x) = 6(x-2)$. Kako je $f''(x) > 0$ za $x > 2$ i $f''(x) < 0$ za $x < 2$, funkcija je strogo konveksna na skupu $(2, +\infty)$ i strogo konkavna na skupu $(-\infty, 2)$. Tačka $x = 2$ je prevojna tačka funkcije f.

Primjer 4. Pokazali smo da je funkcija $f(x) = x + \frac{1}{x}$ strogo konveksna na skupu $(0, +\infty)$ i strogo konkavna na skupu $(-\infty, 0)$. Tačka $x = 0$ nije prevojna tačka ove funkcije, jer funkcija nije definisana u toj tački.

Očigledno je da važi sljedeće tvrđenje:

Teorema. Ako funkcija f u tački x_0 ima izvod drugog reda i ako je x_0 prevojna tačka te funkcije, tada je $f''(x_0) = 0$.

Međutim, obrnuto tvrđenje ne važi, odnosno ako je $f''(x_0) = 0$ tačka x_0 ne mora biti prevojna tačka funkcije f.

Primjer 5. Tačka $x = 0$ nije prevojna tačka funkcije $f(x) = x^4$ iako je $f''(0) = 0$ jer je $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ za svako $x \in R$.

10.3 Asimptote

10.3.1 Vertikalna asimptota

Prava $x = a$ u ravni je *vertikalna asimptota* funkcije $y = f(x)$ ako je bar jedna od graničnih vrijednosti

$$\lim_{x \to a+} f(x), \lim_{x \to a-} f(x),$$

jednak $+\infty$ ili $-\infty$.

Geometrijski, grafik funkcije se približava vertikalnoj asimptoti $x = a$ kada se x približava ka a sa lijeve ili sa desne strane.

Očigledno, vertikalne asimptote ima smisla tražiti samo na krajevima intervala definisanosti funkcije.

Primjer 1. Prava $x = 0$ je vertikalna asimptota funkcije $y = \frac{1}{x}$, jer je

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty, \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Primjer 2. Prava $x = 0$ je vertikalna asimptota funkcije $y = \ln x$, jer je

$$\lim_{x \to 0+} \ln x = -\infty.$$

Primjer 3. Prave $x = -2$ i $x = 2$ su vertikalne asimptota funkcije $y = \frac{1}{x^2-4}$, jer je

$$\lim_{x \to -2-} \frac{1}{x^2-4} = \lim_{x \to 2+} \frac{1}{x^2-4} = +\infty; \lim_{x \to -2+} \frac{1}{x^2-4} = \lim_{x \to 2-} \frac{1}{x^2-4} = -\infty,$$

a u ostalim tačkama funkcija je neprekidna.

10.3.2 Kosa i horizontalna asimptota

Prava $y = kx + n$ je *kosa asimptota* funkcije f kada $x \to +\infty$ ako je

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx - n) = 0.$$

Geometrijski, grafik funkcije se približava kosoj asimptoti kada x teži $+\infty$.

Analogno se definiše kosa asimptota kada $x \to -\infty$.

Specijalno, ako je koeficijent pravca kose asimptote $k = 0$, tada se za nju kaže da je *horizontalna asimptota* (grafika) funkcije. Iz definicije slijedi da je prava $y = n$ horizontalna asimptota funkcije f kada $x \to +\infty$ (odnosno kada $x \to -\infty$) ako je $\lim_{x \to +\infty} f(x) = n$ (odnosno ako je $\lim_{x \to -\infty} f(x) = n$).

Primjer 1. Prava $y = x + 3$ je kosa asimptota funkcije $f(x) = x + 3 + \frac{1}{x^2}$ i kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$ jer je

$$\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x - 3) = 0.$$

Primjer 2. Prava $y = 2$ je horizontalna asimptota funkcije $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ i kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$ jer je $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2$.

Primjer 3. Prava $y = 0$ je horizontalna asimptota funkcije $f(x) = e^x$ kada $x \to -\infty$. Ne postoji ni kosa ni horizontalna asimptota ove funkcije kada $x \to +\infty$.

Teorema. Prava $y = kx + n$ je kosa asimptota kada $x \to +\infty$ ako i samo ako je

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx).$$

Dokaz. Ako je prava $y = kx + n$ kosa asimptota kada $x \to +\infty$ tada, po definiciji, funkcija $\alpha(x) = f(x) - kx - n \to 0$ kada $x \to +\infty$. Odavde slijedi da

$$\frac{\alpha(x)}{x} = \frac{f(x) - kx - n}{x} \to 0$$

kada $x \to +\infty$, pa je

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Osim toga, iz $\alpha(x) \to 0$ kada $x \to +\infty$ slijedi da je

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx).$$

Obrnuto, neka je

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx).$$

Tada je očigledno

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx - n) = 0.$$

Primjer 4. Neka je $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$. Tada je

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - x) = 1.$$

To znači da je prava $y = x + 1$ asimptota date funkcije i kada $x \to +\infty$ i kada $x \to -\infty$.